SESSION 1997

4 heures

Concours d'admission en première année du Cycle de Formation d'Architectes de l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Industries de Strasbourg

Exercice 1

Soit a un réel de l'intervalle [0,1].
On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n par la relation :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(a - u_n^2).$$

i) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n \leq \sqrt{a}$.

ii) Montrer que la suite (u_n) converge vers le réel $\sqrt{a}$.

iii) Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto f_0(x) = 0$ et pour tout entier naturel n et tout réel x par la relation :

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (f_n(x))^2\right).$$

Montrer que pour tout entier naturel n la fonction f_n est une fonction polynôme.
Montrer que pour tout réel x de l'intervalle [0,1] la suite $(f_n(x))$ est convergente vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 2

On considère le plan affine euclidien.
Deux points A et B étant donnés, on note AB la distance de A à B.
Soit (γ) le cercle de centre O et de rayon égal à 1.

i) Soient A, B et C trois points du plan deux à deux distincts.
On considère l'application $M \mapsto f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$ du plan dans $\mathbf{R}$.

a) Pour tout point M du plan, exprimer f(M) en fonction de f(G) où G est le barycentre des points A, B et C, chacun étant affecté du coefficient 1.

b) En déduire l'expression de $AB^2 + BC^2 + CA^2$ en fonction de f(G), puis de f(O).

c) Déterminer les triangles ABC inscrits dans le cercle (γ) pour lesquels la somme

$$AB^2 + BC^2 + CA^2$$

est maximale.

ii) Déterminer les quadrilatères convexes ABCD (les quatre points A, B, C et D étant quatre points deux à deux distincts du plan) inscrits dans le cercle (γ) pour lesquels la somme

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2$$

est maximale.

Représenter un tel quadrilatère.

Exercice 3

Dans l'espace affine euclidien de dimension trois, on considère un cube ABCDEFGH et les points P,Q et R définis par les relations vectorielles suivantes :

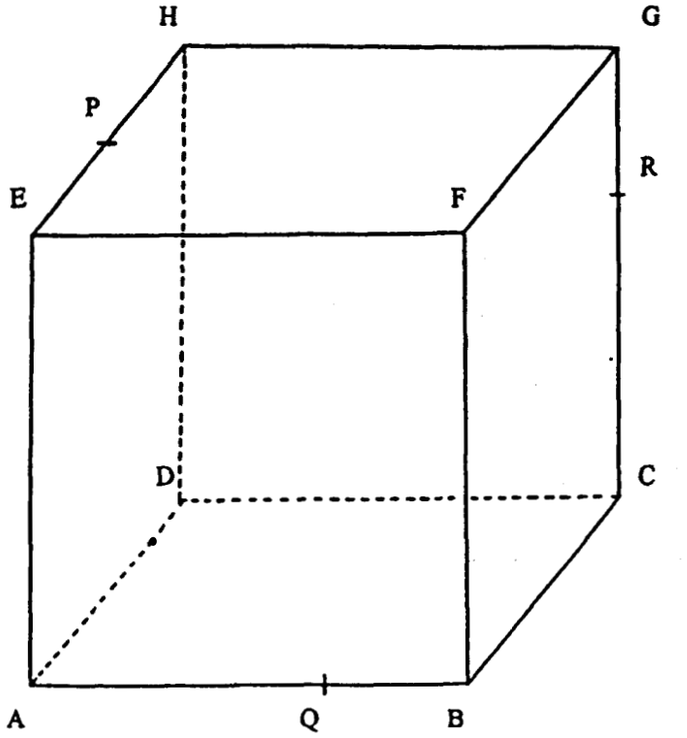
$$\overrightarrow{HP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HE} \qquad \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{GR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GC}.$$

i) *Sur la feuille jointe au sujet et représentant le cube ABCDEFGH dont les côtés ont 6 cm de longueur, représenter soigneusement, à l'aide de la règle seule :*

a) l'intersection K de la droite (PR) avec le plan (ABC)
b) l'intersection S du plan (PQR) avec la droite (BC)
c) le polygone représentant la section du cube par le plan (PQR).

On se contentera de la seule figure, sans commentaires.

ii) Dessiner en vraie grandeur le triangle PQR ainsi que le polygone obtenu et justifier cette représentation.



Exercice 4

Soit n un entier naturel *non nul* et soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension égale à n.

Soit G un sous-espace vectoriel de E et soit g un endomorphisme de E.
On dit que le sous-espace G est stable par g si pour tout vecteur x de G, le vecteur g(x) est dans G.
On rappelle le résultat suivant, *que l'on ne demande pas de démontrer*, à savoir que la somme et l'intersection de deux sous-espaces stables par f sont encore stables par f.

Soit H un autre sous-espace de E.
On dit que G est plus petit que H si G est contenu, au sens large, dans H.

On désigne par Id_E l'endomorphisme identité de E et par 0_E le vecteur nul de E.

On considère alors un endomorphisme f de E qui vérifie la relation $f \circ f = -Id_E$.
Soit a un vecteur *non nul* de E.

i) Montrer que la famille $\{a, f(a)\}$ est une famille libre de E.
On note F_a le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\{a, f(a)\}$.
Montrer que F_a est le plus petit sous-espace de E stable par f qui contient a.

ii) Soit G un sous-espace de E stable par f.
Montrer que l'intersection de F_a et de G est réduite à $\{0_E\}$ si et seulement si le vecteur a n'appartient pas à G.

iii) Soient p un entier naturel non nul et $G_1, G_2, \ldots, G_p$ des sous-espaces vectoriels de E.
On appelle somme des sous-espaces $G_1, G_2, \ldots, G_p$ et l'on note $G_1 + G_2 + \ldots + G_p$ l'ensemble des vecteurs x de E tels qu'il existe $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_p$ avec

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_p. \qquad (I)$$

Cette somme est un sous-espace vectoriel, *propriété que l'on ne demande pas de démontrer*.
On dit que la somme est directe, et l'on écrit alors $G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_p$ si la décomposition précédente (I) est unique.

Montrer que l'on peut trouver un entier naturel q non nul et des vecteurs non nuls $a_1, a_2, \ldots, a_q$ de E, tels que :

$$E = F_{a_1} \oplus F_{a_2} \oplus \ldots \oplus F_{a_q}.$$

En déduire que la dimension de E est paire.

iv) On suppose que la dimension de E est paire et qu'il existe un endomorphisme f de E qui vérifie la relation $f \circ f = -Id_E$. On pose $n = 2q$.

a) Montrer qu'il existe une base b de E du type :

$$b = \left(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2), \ldots e_q, f(e_q)\right).$$

b) Expliciter la matrice de f dans une telle base lorsque $n = 2,4$. Généraliser.
En déduire l'existence d'endomorphismes f de E qui vérifient la relation $f \circ f = -Id_E$.

c) Soient f et g deux endomorphismes de E qui vérifient :

$$f \circ f = g \circ g = -Id_E.$$

Montrer qu'il existe un endomorphisme bijectif h tel que $g = h^{-1} \circ f \circ h$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail